SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

SU UN PROBLEMA "TWO-POINT" PER UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE

10 E 17 DICEMBRE 1981.

A.FAVINI

Su un problema "two-point" per un sistema di equazioni differenziali astratte

Voglio esporre alcuni risultati che sono stati ottenuti da A.Venni e da me su un sistema di equazioni differenziali astratte che trova applicazione nella teoria del controllo ottimo.

Mi sembra opportuno premettere alcune definizioni e risultati che, d'altra parte, hanno interesse in sé.

1. Sulla teoria della interpolazione

Si dice che due spazi di Banach complessi A_0 e A_1 formano una coppia d'interpolazione se sono immersi con continuità in uno spazio lineare (complesso) di Haussdorff.

E' facile allora vedere che gli spazi $A_0 \cap A_1$ e A_0+A_1 muniti rispettivamente delle norme

$$\|x\|_{A_0\cap A_1} = \max\{\|x\|_{A_0}, \|x\|_{A_1}\}, \qquad x\in A_0\cap A_1,$$

$$\|x\|_{A_0+A_1} = \inf_{\substack{x=x_0+x_1\\ x_i\ A_i}}\{\|x_0\|_{A_0} + \|x_1\|_{A_1}\}, \quad x\in A_0+A_1,$$

sono spazi di Banach, con immersioni $A_1\cap A_0 \hookrightarrow A_i \hookrightarrow A_0+A_1$ $(i=0,1)$ continue.

Il metodo delle medie (Lions-Peetre) [6]

Se A è uno spazio di Banach e $v=v(t)$ è una funzione da $R^+ = (0,+\infty)$ in A, si pone

$$\|v\|_{L_p^*(A)} = \|v(t)\|_{L_p^*(A)} = \left(\int_0^{+\infty} \|v(t)\|_A^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty(A)} = \|v(t)\|_{L_\infty(A)} = \sup_{0<t<\infty} \|v(t)\|_A, \quad p = +\infty$$

Per la definizione degli spazi di medie, è fondamentale il seguente

<u>Lemma 1.1</u> Sia A_0, A_1 una coppia d'interpolazione e sia $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0<\theta<1$, $1/p = (1-\theta)p_0 + \theta/p_1$; sia $a \in A_0 + A_1$ per cui risulta

$$a = v_0(t) + v_1(t), \quad t \in R^+, \tag{1.1}$$

con

$$v_j(t) \ A_j\text{- continua e} \tag{1.2}$$

$$t^{-\theta}\|v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(A_1)} < \infty ;$$

Allora $\exists$ costanti c_q, $c_2 > 0$ <u>indipendenti</u> da a, tali che

$$c_1 \inf(\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(A_1)}) \leq$$

$$\leq \inf(\|t^{-\theta} v_0(t)\|^{p_0}_{L^*_{p_0}(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|^{p_1}_{L^*_{p_1}(A_1)})^{1/p} \leq$$

$$\leq c_2 \inf(\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(A_1)}),$$

dove l'inf è preso su tutte le possibili rappresentazioni del tipo (1.1) (1.2).

<u>Prova</u>. Si può supporre $a \neq 0$. Ma allora non può essere nè X $v_0(t) \equiv 0$ né $v_1(t) \equiv 0$. Infatti, se $v_0(t) \equiv 0$, per esempio, allora $v_1(t) \equiv a$ non soddisfa certamente $t^{1-\theta}\, v_1(t) \in L^*_{p_1}(A_1)$!

Se si rimpiazza t in (1.1) con λt, dove λ è un arbitrario numero positivo, si ottiene ancora una rappresentazione ammissibile. Scegliendo:

$$\lambda = \lambda(v_0, v_1) = \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)} \, \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{-1}_{L^*_{p_0}(A_0)},$$

abbiamo, in forza della

$$A^{1-\theta} B^{\theta} \leq (1-\theta)\, A + \theta\, B\,, \quad A, B \geq 0,\ 0<\theta<1,$$

$$\inf (\| t^{-\theta} v_0(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)}) \leq$$

$$\leq \inf (\lambda^{\theta} \cdot \| t^{-\theta} v_0(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \lambda^{-(1-\theta)} \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)}) \leq$$

$$\leq 2 \inf \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{1-\theta}_{L^*_{p_0}(A_0)} \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{\theta}_{L^*_{p_1}(A_1)} \leq$$

$$\leq C \inf (\| t^{-\theta} v_0(t) \|^{p_0/p}_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{p_1/p}_{L^*_{p_1}(A_1)}) .$$

Ciò prova la prima disuguaglianza.

Posto $\lambda = \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{p/p_0}_{L^*_{p_1}(A_1)} \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{-p/p_1}_{L^*_{p_0}(A_0)}$,

per la stessa ragione di prima si ha

$$\inf (\| t^{-\theta} v_0(t) \|^{p_0}_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{p_1}_{L^*_{p_1}(A_1)})^{1/p} \leq$$

$$\leq \inf (\lambda^{\theta p_0} \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{p_0}_{L^*_{p_0}(A_0)} + \lambda^{-(1-\theta)p_1} \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{p_1}_{L^*_{p_1}(A_1)})^{1/p} \leq$$

$$\leq 2 \inf \| t^{-\theta} v_0(t) \|^{1-\theta}_{L^*_{p_0}(A_0)} \| t^{1-\theta} v_1(t) \|^{\theta}_{L^*_{p_1}(A_1)} \leq$$

$$\leq C \inf \left(\| t^{-\theta} v_0(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)} \right) \quad \text{Q.E.D.}$$

Osservazione. Si può dimostrare che se a A_0+A_1 ha una rappresentazione del tipo (1.1) (1.2), allora ha una analoga espressione, con $v_j(t)$ infinitamente A_j derivabili

Si definiscono ora gli spazi $(A_0, A_1)_{\theta, p}$.

Definizione 1.2. Se $1<p_0, p_1<\infty$ e $1/p = (1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $0<\theta<1$, si pone $(A_0, A_1)_{\theta, p} = a \left\{ \in A_0+A_1 ;\ a \text{ ha una rappresentazione (1.1) (1.2.)} \right\}$,

$$\| a \|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} = \inf \left(\| t^{-\theta} v_0(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)} \right).$$

Se $p_0=p_1 = \infty$, si pone

$(A_0, A_1)_{\theta, \infty} = \{ a \in A_0+A_1$; a ha una rappresentazione del tipo (1.1) (1.2) con $p_0= p_2 = \infty$ e

$$\| a \|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \inf \left(\| t^{-\theta} v_0(t) \|_{L^*_{\infty}(A_0)} + \| t^{1-\theta} v_1(t) \|_{L^*_{\infty}(A_1)} \right).$$

Si può anche dimostrare il seguente teorema di equivalenza [6].

Teorema 1.3 Se $1 < p_0, p_1<\infty$, $1/p = (1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $0<\theta<1$, allora $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p} \Leftrightarrow a \in A_0+A_1$ ed esiste u: $R^+ \to A_0 \cap A_1$ fortemente continua tale che

$$a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} \quad \text{in} \quad A_0 + A_1,$$

$$\| t^{-\theta} u(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \| t^{1-\theta} u(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)} < \infty .$$

Vale un analogo risultato se $p_0 = p_1 = \infty$.

Il teorema di interpolazione (Lions-Peetre)

Teorema 1.4. Siano A_0, A_1, B_0, B_1 due coppie d'interpolazione e sia T un operatore lineare da A_0+A_1 in B_0+B_1 tale che la restrizione di T a A_j sia continua da A_j a B_j $(j=0,1)$. Allora T manda con continuità $(A_0,A_1)_{\theta p} = A_{\theta,p}$ in $(B_0,B_1)_{\theta,p} = B_{\theta,p}$ e

$$\|T\|_{A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}} \leq \text{Cost.}\ \|T\|^{1-\theta}_{A_0 \to B_0} \|T\|^{\theta}_{A_1 \to B_1} .$$

Dimostrazione Sia $a \in A_{\theta,p}$ e sia $\varepsilon \in R^+$ arbitrario. Allora esistono $v_0(t)$, $v_1(t)$ soddisfacenti (1.1) (1.2) tali che

$$\|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(A_0)} + \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(A_1)} < \|a\|_{A_{\theta,p}} + \varepsilon .$$

Allora $Ta = Tv_0(t) + Tv_1(t)$, dove $t^{-\theta} Tv_0(t) \in L^*_{p_0}(B_0)$, $t^{1-\theta} Tv_1(t) \in L^*_{p_1}(B_1)$ con

$$\|t^{-\theta} Tv_0(t)\|^{p_0}_{L^*_{p_0}(A_0)} \leq \|T\|^{p_0}_{A_0 \to B_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|^{p_0}_{L^*_{p_0}(A_0)},$$

$$\|t^{1-\theta} Tv_1(t)\|^{p_1}_{L^*_{p_1}(A_1)} < \|T\|^{p_1}_{A_1 \to B_1} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|^{p_1}_{L^*_{p_1}(A_1)}$$

Così, in forza del Lemma 1.1.

$$\|Ta\|_{B_{\theta,p}} < C(\|T\|_{A_0 \to B_0} \|t^{-\theta} v_0(t)\|_{L^*_{p_0}(A_0)})^{1-\theta} (\|T\|_{A_1 \to B_1} \|t^{1-\theta} v_1(t)\|_{L^*_{p_1}(A_1)})^{\theta}$$

$$\leq C' \|T\|^{1-\theta}_{A_0 \to B_0} \|T\|^{\theta}_{A_1 \to B_1} (\|a\|_{A_{\theta,p}} + \varepsilon) .$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, il teorema risulta provato. Q.E.D.

Si dimostra poi il seguente teorema di densità.

Teorema 1.5. Sia A un sottospazio dello spazio di Banach X. $\overset{o}{A}$ denota il completamento di A in X. Nel nostro caso, $\overset{o}{A}_j$ denota il completamento di $A_0 \cap A_1$ in A_j, $j = 0,1$. Ebbene, se A_0, A_1 è una coppia d'interpolazione, $0<\theta<1$ e $1<p<\infty$, allora $A_0 \cap A_1$ è denso in $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ e

$$(A_0, A_1)_{\theta,p} = (\overset{o}{A}_0, A_1)_{\theta,p} = (A_0, \overset{o}{A}_1)_{\theta,p} = (\overset{o}{A}_0, \overset{o}{A}_1)_{\theta,p} .$$

2. Operatori positivi e interpolazione

Definizione 2.1. Sia A uno spazio di Banach e sia Λ un operatore lineare chiuso a dominio $D(\Lambda)$ denso in A. Si dice che Λ è un operatore positivo se $(-\infty,0)$ è contenuto nell'insieme risolvente di Λ e $C > 0$ tale che

$$\|(\Lambda+t)^{-1}\|_{L(A)} < C(1+t)^{-1}, \quad t > 0 .$$

Osservazione. Ogni operatore autoaggiunto definito positivo in uno spazio di Hilbert è positivo.

Se Λ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di tipo $\beta<0$, allora $-\Lambda$ è positivo.

Per tali operatori c'è una caratterizzazione importante degli spazi $(A, D(\Lambda^m))_{\theta,p}$, dovuta fondamentalmente a Lions, Peetre e Grisvard.

Teorema 2.2. Sia Λ un operatore positivo. Sia m un numero naturale, $0<\theta<1$, $1<p<\infty$. Se k, l sono interi soddisfacenti $0\leq k<s = \theta m$, $l>s-k$, allora

$$(A,D(\Lambda^m))_{\theta,p} = \left\{ a \in A: \|a\|_{\theta,p} = \|t^{s-k} [\Lambda(\Lambda+t)^{-1}]^1 \ \Lambda^k a\|_{L_p^*(A)} < \infty \right\},$$

essendo $\|a\|_{\theta,p}$ una norma equivalente a quella introdotta in genera= le. Si noti che se m = 1 = 1, k = 0, risulta

$$(A,D(\Lambda))_{\theta,p} = \left\{ a \in A: \|a\|_{\theta,p} = \|t^{\theta} [\Lambda(\Lambda+t)^{-1}] a\|_{L_p^*(\Lambda)} < \infty \right\}.$$

3. Metodo operazionale (Da Prato-Grisvard)

P.Grisvard e G.Da Prato si sono interessati in alcuni lavori del seguente problema:

Sia X uno spazio di Banach complesso e siano A,B operatori linea= ri chiusi a dominio D_A, D_B, rispettivamente, e con insiemi risolventi non vuoti. Posto $Lx = Ax + Bx$, $x \in D_L = D_A \cap D_B$, studiare la risolubili= tà di

$$Lx - \lambda x = y, \quad x \in D_L, \ \lambda > 0 . \qquad (3.1.)$$

Distingueremo due casi, quello in cui A e B commutano nel senso che, posto $[A_0;A_1] = A_0A_1 - A_1A_0$, risulti

$$[(A-\lambda)^{-1}; (B-\mu)^{-1}] = 0, \qquad \forall \lambda \ \rho_A, \forall \mu \ \rho_B, \qquad (3.2)$$

e quello in cui (3.2) non è assunta.

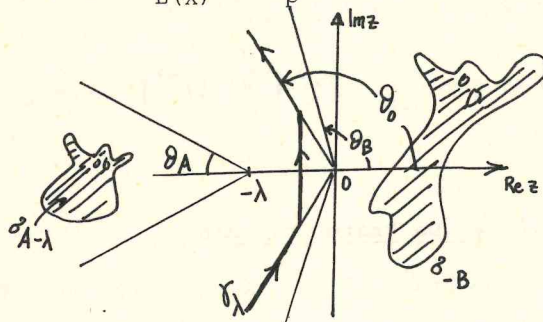
Grosso modo, se B è l'operatore -d/dt con condizione iniziale nulla, A è, nel primo caso un operatore differenziale del 2° ordine nella variabile spaziale x, a coefficienti indipendenti dal tempo t, mentre nel secondo caso, i suoi coefficienti dipendono da t.

Introduciamo la seguente condizione:

Definizione 3.1. Sia P un operatore lineare da DP (ϵX) in X, $\varphi \epsilon$ $[0,\pi]$. Diremo che P soddisfa $H(\varphi)$ se

(i) $\rho_P \supseteq \Sigma_p = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ -\pi + \varphi < \arg \lambda < \pi - \varphi \right\}$,

(ii) $\exists\, C_p : (-\pi+\varphi, \pi-\varphi) \to R^+$, pari e convessa, tale che

$$\|(P-z)^{-1}\|_{L(X)} \leq C_p(\theta)|z|^{-1}, \text{ arg } z = \theta.$$

IPOTESI H 1: Esistono $\theta_A, \theta_B > 0$ tali che A soddisfa $H(\theta_A)$, B soddisfa $H(\theta_B)$ e

$$\theta_A + \theta_B < \pi.$$

Se vale H 1, allora uno degli angoli θ_A, θ_B è necessariamente $< \pi/2$ e così l'operatore corrispondente è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico non necessariamente continuo in 0 (perché non è detto che D_A o D_B siano densi in X).

La soluzione di (3.1) si fonda su una costruzione esplicita della sua soluzione sotto la forma

$$x = S_\lambda y, \quad \text{dove}$$

$$S_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} dz, \quad \lambda > 0 \tag{3.3}$$

dove γ è una curva semplice da $\infty e^{-i\theta_0}$ a $\infty e^{i\theta_0}$ contenuta in $(\Sigma_A - \lambda) \cap \Sigma_{-B}$ con $\theta_B < \theta_0 < \pi - \theta_A$. Per esempio, $\gamma = \gamma_\lambda$ può essere la frontiera orientata del dominio situato a sinistra delle rette:

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{arg } z = -\theta_0\}, \; \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = -(\lambda/2)\}, \; \{z \in \mathbb{C} : \text{arg } z = \theta_0\},$$

supponendo $\theta_0 > \pi/2$ e così $\theta_A < \pi/2$.

Non è difficile vedere che, valendo o no (3.2), risulta

Lemma 3.2. Se A,B soddisfano H.1, allora $\exists N>0$ tale che

$$\|S_\lambda\|_{L(X)} \leq N/\lambda, \quad \lambda > 0.$$

IL CASO COMMUTATIVO

Lemma 3.3. Se vale (3.2) e H.1, allora

(i) $S_\lambda\,(Lx-\lambda x) = x, \quad x \notin D_L;$

(ii) $\forall x \in D_A + D_B$, $S_\lambda x \in D_L$ e $(L-\lambda)\, S_\lambda x = x$.

Dimostrazione. (i) Poniamo

$$u(z) = (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}(Lx-\lambda x) =$$

$$= (B+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x) + (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\,.$$

Poiché:

$$(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x) = x + z\,(A-z-\lambda)^{-1}x,$$

$$(B+z)^{-1}Bx = x - z\,(B+z)^{-1}x,$$

abbiamo

$$u(z) = (B+z)^{-1}x + z(B+z)^{-1}(A-z-\lambda)^{-1}x + (A-z-\lambda)^{-1}x - z(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}x =$$

$$= (B+z)^{-1}x + (A-z-\lambda)^{-1}x =$$

$$= z^{-1}\left\{(B+z)^{-1}Bx + (A-z-\lambda)^{-1}(z+A-\lambda+\lambda-A)\,x\right\} =$$

$$= z^{-1}\left\{-(B+z)^{-1}Bx + (A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x)\right\}.$$

Così

$$S_\lambda\,(Lx-\lambda x) = -(2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_\lambda} u(z)\,dz = (2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_\lambda}(B-z)^{-1}Bx\,\frac{dz}{z} -$$

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_\lambda}(A-z-\lambda)^{-1}(Ax-\lambda x)\,\frac{dz}{z}$$

Il primo integrale è nullo perché $(B+z)^{-1}Bx/z$ è olomorfa e decre

sce come $|z|^{-2}$ a sinistra di γ_λ; il secondo integrale vale $-x$, in forza del teorema dei residui e della decrescenza in $|z|^{-2}$ della funzione integranda.

Così $S_\lambda(Lx-\lambda x) = x$.

(ii). Poiché A,B hanno ruoli simmetrici, basta considerare il caso di $x \in D_B$, per esempio. In forza di (3.2), essendo $x \in D_B$, $y = S_\lambda x \in D_B$ e $By = S_\lambda Bx$. Per verificare che $y \in D_A$, osserviamo che

$$(B+z)^{-1}x = \frac{1}{z}\left\{x-(B+z)^{-1} B\, x\right\}. \text{ Quindi,}$$

$$y = S_\lambda x = -(2\pi i)^{-1}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}\, x\, \frac{dz}{z} + (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}Bx\,\frac{dz}{z}$$

$$= (A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}B\, x\,\frac{dz}{z}.$$

Di qui,

$$Ay = A(A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1}\int_\gamma A(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\, Bx\,\frac{dz}{z} =$$

$$= A(A-\lambda)^{-1}x + (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (z+\lambda)(A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\, Bx\,\frac{dz}{z} =$$

$$= x-\lambda(A-\lambda)^{-1}x + \lambda(2\pi i)^{-1}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\, Bx\,\frac{dz}{z} +$$

$$+ (2\pi i)^{-1}\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}(B+z)^{-1}\, Bx\, dz =$$

$= x + \lambda y - By$. Q.E.D.

Si può dimostrare che se A,B soddisfano la (3.2) e H 1, con D_A+D_B denso in X, allora L ha una chiusura $\bar{L}$ con $\rho_{\bar{L}} \supset (0\ {+\infty})^{-1}$ e $(\bar{L}-\lambda)^{-1} = S_\lambda$, $\forall\lambda>0$.

Inoltre, $\bar{L}$ verifica H $(\sup(\theta_A, \theta_B))$ e così, se A e B sono generatori infinitesimali di semigruppi olomorfi soddisfacenti (3.2), allora anche $\bar{L}$ lo è.

L'introduzione degli spazi d'interpolazione consente di precisare $D_{\bar{L}}$. Prima però introduciamo, per semplicità di scrittura e per

seguire l'uso, la seguente

Definizione 3.4. Sia T un operatore lineare chiuso in X e sia D_T munito della norma del grafico. Si pone

$$D_T(\theta;p) = (D_T;\ X)_{1-\theta,\ p} = (X;\ D_T)_{\theta,p},$$

$$p \in [1,\infty],\quad 0<\theta<1\ .$$

Pertanto (cfr. ϕ 1) se ρ_T (o ρ_{-T}) $\supset R^+$ e $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C(\lambda+1)^{-1}$ (o solo $C\lambda^{-1}$), $\lambda > 0$, allora D_T $(\theta;p)$ è il sottospazio di X formato dagli x tali che

$$\|t^\theta\ T(T-t)^{-1}\ x\| \in L_p^*,\ p>1.$$

Il caso che ci interessa è quello di

$$D_P = \left\{ u \in L^P(0,T;E) = X;\ u' \in X,\ u(0) = 0 \right\},\ Pu = -u',$$

per cui $D_p = W_0^{1,P}(0,T,E)$, spazio di Sobolev d'ordine 1 su $[0,T]$ a valori nel Banach complesso E, con la condizione u(0)=0. Risulta

$$(W_0^{1,p}(0,T;E);\ L^P(0,T;E))_{1-\theta,p} = (L^P(0,T;E);\ D_P)_{\theta,p} =$$

$$= \begin{cases} W^{\theta,p}(0,T;\ E), & \text{se } 0<\theta<1/p, \\ W_0^{\theta,p}(0,T;\ E), & \text{se } 1/p<\theta<1, \end{cases}$$

dove

$W^{\theta,p}(0,T;E)$ denota lo spazio delle $u \in L^P(0,T;E)$ tali che

$$\int_0^T \int_0^T \|u(t)-u(s)\|_E^P \frac{dt\ ds}{|t-s|^{1+\theta p}} < \infty \quad (0<\theta<1/p),$$

$$W_0^{\theta,p}(0,T;E) = \left\{ u \in W^{\theta,p}(0,T;E) : u(0) = 0 \right\} \quad (1/p<\theta<1).$$

Se E è uno spazio di Hilbert, p = 2 e $0<\theta<1/2$, poiché

$$D_{P*} = \left\{ u \in X:\ u' \in X,\ u(T) = 0,\ P^{*}u = u' \right\},$$

risulta

$$D_p(\theta;2) = W^{\theta,2}(0,T;E) = D_{P*}(\theta;2)$$

L'introduzione degli spazi $D_A(\theta;p)$ o $D_B(\theta;p)$ è, come dicevamo, motivata dal fatto che se $x \in D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$), allora $y = S_\lambda x \in D_L$ e $Ay, By \in D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$); cioè, la restrizione di L a $D_A(\theta;p)$ (o a $D_B(\theta;p)$) è chiusa e non solo chiudibile.

Si vede infatti che

Teorema 3.5. Se valgono (3.2) e H.1, allora

$$D_{\bar{L}} \subset D_A(1;\infty) \cap D_B(1;\infty) \subset D_A(\theta;p) \cap D_B(\theta;p)$$

dove $\theta \in (0,1)$ e $p \in [1,\infty]$; $D_A(1;\infty) = \left\{ a \in X;\ \| tA^2(A-t)^{-2} x \| \in L^{*}_{\infty}.\ \right\}$.

Teorema 3.6. Se $y \in D_A(\theta;p) + D_B(\theta;p)$, $\theta \in (0,1)$ e $p \in [1,+\infty]$, allora $x = S_\lambda y \in D_L$ e $(L-\lambda)x = y$.

Se $y \in D_A(\theta;p)$ $[$o a $D_B(\theta;p)]$, allora $Ax, Bx \in D_A(\theta;p)$ $[$rispettivamente, a $D_B(\theta;p)]$.

Teorema 3.7. Se valgono (3.2) e H 1, X è uno spazio di Hilbert, D_A e D_B sono densi in X ed esiste un $\theta \in (0,1)$ tale che $D_B(\theta;2) = D_B^{*}(\theta;2)$, allora L è chiuso (come operatore in X), $\rho_L \supset (0,+\infty)$ e $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda\ \forall\ \lambda \in R^+$.

IL CASO NON COMMUTATIVO

Supporremo sempre che A, B soddisfino H 1, lasciando cadere (3.2), che è sostituita dalla ipotesi più debole:

IPOTESI H 2 Diciamo che A,B soddisfano $H(A,B,\varphi)$ se

i) D_B è stabile per $(A-\lambda)^{-1}$ nel senso che

$$(A-\lambda)^{-1}(D_B) \subseteq D_B \quad \forall \lambda \ \rho_A,$$

ii) Esistono 2 funzioni C e φ su $(-\pi+\theta_A, \pi-\theta_A) \times (-\pi+\theta_B, \pi-\theta_B)$ e $(0,\infty) \times (0,\infty)$, rispettivamente, con C convessa e pari nelle due variabili, tali che

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\gamma} \varphi(|z+\lambda|,|z|)\, d|z| = 0,$$

$$\left\| \left[B; (A-\lambda)^{-1}\right] (B-\mu)^{-1} \right\|_{L(X)} \leqslant C(\theta',\theta'')\varphi(|\lambda|,|\mu|),$$

$\theta' = \arg \lambda$, $\theta'' = \arg \mu$, $|\theta| < \pi-\theta_A$, $|\theta''| < \pi-\theta_B$;

γ è una curva semplice da $\infty\, e^{-i\theta_0}$ a $\infty\, e^{i\theta_0}$ in $(\Sigma_A-\lambda)$ $\Sigma_B, \theta_0<\theta_0<\pi-\theta_A$.

In virtù di H.1 è lecito considerare l'operatore S_λ, $\lambda>0$, ma questa volta, mancando (3.2), cade il Lemma 3.3.

Quello che possiamo provare è

Lemma 3.8 . Se valgono H.1 e H.2 e y D_B, allora $S_\lambda y = x \ D_L$ e $(L-\lambda)x = y + R_\lambda y$, dove

$$R_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_\gamma \left[B; (A-z-\lambda)^{-1}\right] (B+z)^{-1}\, dz.$$

La dimostrazione è abbastanza semplice e segue le linee di quella del Lemma 3.3.

Dal Lemma 3.8 abbiamo che $(1+R_\lambda)(D_B) \subseteq (L-\lambda)(D_L)$ e così, se

$1+R_\lambda$ è invertibile e D_B è denso in X, allora anche $(L-\lambda)(D_L)$ è denso in X e si ottiene una soluzione debole di (3.1).

Il modo più semplice per ottenere che $1+R_\lambda$ sia invertibile è quello di applicare il teorema di Neumann. Ora,

$$\|R_\lambda\|_{L(X)} \leq (2\pi)^{-1} \int_\gamma k\ \varphi(|z+\lambda|,|z|)\ d|z|,$$

dove k è una costante che non dipende da λ. Quindi, esiste $\omega_1>0$ tale che $\|R_\lambda\|_{L(X)}<1$ per ogni $\lambda>\omega_1$. Così per tali λ, $1+R_\lambda$ ha inverso limitato.

Il nostro scopo è però quello di ottenere soluzioni strette. E a questo scopo tornano fuori gli spazi $D_B(\theta;p)$. Prima di tutto, si può dimostrare che, sotto H.1 e H.2, S_λ è continuo da X a $D_A(1;\infty)\cap D_B(1;\infty)$; inoltre, utilizzando il teorema di Young sulla convoluzione multiplicativa (vedi, per esempio, il libro di OKIKIOLU), si prova:

Lemma 3.9. S_λ è continuo da $D_B(\theta;p)$ a D_L per ogni $\theta\in(0,1)$ e $p\in[1,\infty]$; inoltre, se $y\in D_B(\theta;p)$,

$$(L-\lambda)S_\lambda\ y = y + R_\lambda y.$$

In effetti, poichè $y\in D_B(\theta;p)$, è facile vedere che $x=S_\lambda y\in D_L$ e

$$Bx = -(2\pi i)^{-1}\cdot\int_\gamma (A-z-\lambda)^{-1}\cdot B(B+z)^{-1}y\ dz + R_\lambda\ y, \tag{3.4}$$

$$Ax = -\ Bx + \lambda x + (1+R_\lambda)y\ . \tag{3.5}$$

Ora,

Lemma 3.10. Se $y\in D_B(\theta;p)$ allora $BS_\lambda y\in D_B(\theta;p)$, purché

$$R_\lambda(D_B(\theta;p)) \subseteq D_B(\theta;p) \tag{3.6}$$

La prova è molto tecnica ed usa, come al solito, il teorema di Young sulla convoluzione.

Il punto cruciale è la (3.6). Una ipotesi chiaramente sufficiente per la sua validità è la seguente

Ipotesi H.3: $\|[B;(A-z')^{-1}](B-z")^{-1}\|_{L(D_B(\theta;p))} < C(\theta';\theta")\varphi(|z'|;|z"|)$, $\theta' = \arg z'$, $\theta" = \arg z"$, $|\theta'| < \pi-\theta_A$, $|\theta"| < \pi-\theta_B$

Si noti che se vale la (3.6), in virtù del Lemma 3.10 e della (3.5), anche $AS_\lambda\ y \in D_B(\theta;p)\ \forall y \in D_B(\theta;p)$.

I lemmi precedenti permettono di provare il seguente teorema di esistenza ed unicità.

Teorema 3.10. Siano A,B operatori soddisfacenti H 1, H 2 e H 3. Allora $\exists\ \omega > 0$ tale che per $y \in D_B(\theta;p)$ il problema (3.1) ha una unica soluzione (stretta) x tale che $Ax, Bx \in D_B(\theta;p)\ \forall\ \lambda>\omega$. Risulta $x = S_\lambda\ (1+R_\lambda)^{-1}\ y$.

Nel caso particolare di X spazio di Hilbert, si ha

Teorema 3.11. Valgano le ipotesi del Teorema 3.10, con X spazio di Hilbert, p = 2 e $\varphi(|z+\lambda|,|z|) = 0\ (|z|^{-1})$ per λ fissato.

Se D_B è denso in X e $D_B(\theta;2) = D_{B^*}(\theta;2)$, allora L è chiuso in X ed esiste $\omega>0$ tale che $\rho_L \supseteq (\omega,\infty)$ e $(L-\lambda)^{-1} = S_\lambda\ (1+R_\lambda)^{-1}$.

4. Esempio di applicazione a problemi differenziali

Dò una breve descrizione del modo di approcciare un problema di tipo parabolico con le tecniche operazionali che ho descritto nel ϕ 3.

Prendiamo come X lo spazio $L^p(0,T;E)$, $1<p<\infty$, E essendo uno spazio di Banach complesso e sia P definito come in ϕ 3:

$$D_P = \{u \in X:\ u' \in X,\ u(0) = 0\}, \qquad Pu = -u'.$$

Sia $t \to \Lambda(t)$ una famiglia di operatori lineari chiusi in E

$\forall t \in [0,T]$ tali che $t \to (\Lambda(t)-\lambda)^{-1}y$ è misurabile in $[0, T]$ a valori in $E, \forall y \in E$ e per ogni λ in opportuno sottoinsieme del piano complesso. Si pone

$$D_Q=\left\{u \in X;\ u(t) \in D_{\Lambda(t)} \text{ q.d.}, t \to \Lambda(t)u(t) \in X\right\},$$

$$(Qu)(t) = \Lambda(t)u(t).$$

Si può vedere che se $D_{\Lambda(t)}$ è denso in $E\ \forall t \in [0,T]$, allora D_Q è denso in X.

Prendiamo $A=Q$, $B=P$ (cfr.§ 3). Le $Lx= Ax+Bx$, $x \in D_L= D_A \cap D_B$, l'equazione (3.1) significa

$$\begin{aligned} -u'(t) + \Lambda(t)u(t) - \lambda u(t) &= f(t),\ 0<t<T, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Per trattare (4.1) nel caso in cui $\Lambda(t)$ dipende da t è necessario esplicitare $B; [(A-z')^{-1}]\ (B-z")^{-1}$.

Si ha in effetti

$$\left\{[P;(Q-z')^{-1}]\ (P-z")^{-1}u\right\}(t) = \left\{\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-z')^{-1}\right\} \int_0^t e^{-z"(t-s)}u(s)\,ds,$$

valida non solo formalmente se valgono le ipotesi (si noti che P soddisfa $H(\pi/2)$):

(i) $\exists\, \theta_\Lambda \in [0,\pi/2)$ tale che $\Lambda(t)$ verifica $H(\theta_\Lambda)$ con $C_\Lambda(\theta)$ indipendente da $t \in [0,T]$;

(ii) $t \to (\Lambda(t)-\lambda)^{-1}$ y appartiene a $W^{1,\infty}(0,T;\ E)\ \forall y \in E, \forall \lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda} = \left\{z \in C:\ -\pi+\theta_\Lambda < \theta < \pi - \theta_\Lambda\right\}$.

( ] (iii) $\exists\, \alpha\ [(0,1)]$ tale che $\left\|\frac{d}{dt}(\Lambda(t)-\lambda)^{-1}\right\|_{L(E)} \leq C_\Lambda(\theta)\ |\lambda|^{-\alpha}$,

$$\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda} \text{ con } \arg \lambda = \theta.$$

Le (i)-(iii)assicurano che Q soddisfa $H(\theta_\Lambda)$ e, (in forza della (ii)), $(Q-z')^{-1}(D_P) \subseteq D_P$ $\forall z' \in \Sigma_\theta$. Inoltre, per la (iii) ed il fatto che P soddisfa H $(\pi/2)$,

$$\| [P; (Q-z')^{-1}] (P-z")^{-1} \|_{L(X)} \leq K(\cos \theta")^{-1} (|z'|^\alpha |z"|)^{-1},$$

per arg $z" = \theta"$, $|\theta"| < \pi/2$, z' Σ_{θ_Λ}.

Per poter applicare il Teorema 3.10 dobbiamo però aggiungere un'altra condizione

(iv) Esiste $\eta \in (0,1)$ tale che

$$\| \frac{d}{dt} (\Lambda(t)-\lambda)^{-1} - \frac{d}{ds} (\Lambda(s)-\lambda)^{-1} \|_{L(E)} \leq C_\Lambda(\theta) |\lambda|^{-\alpha} |t-s|^\eta,$$

dove $\lambda \in \Sigma_{\theta_\Lambda}$, $\theta = \arg \lambda$.

Ciò implica, infatti,

Lemma 4.1. Se valgono le condizioni (i)-(iv), allora H 3 è soddisfatta se $0<\theta< \min \{\eta, 1/p\}$.

Dimostrazione. Posto $v = (P-z')^{-1} u$, con $u \in W^{\theta,P}(0,T;E)$ (si veda, a questo proposito, la p. 11), risulta

$$\| [P; (Q-z")^{-1}] v \|^p_{W^{\theta,p}} = \int_0^T \| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t)-z')^{-1} \right\} v(t) \|^p_E \, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^T \| \left\{ \frac{d}{dt} (\Lambda(t)-z')^{-1} \right\} v(t) - \left\{ \frac{d}{ds} (\Lambda(s)-z')^{-1} \right\} v(s) \|^p_E \frac{dt\, ds}{|t-s|^{1+\theta p}} <$$

$$< \left(\frac{k}{|z'|^\alpha}\right)^p \int_0^T \| v(t) \|^\eta_E \, dt + \left(\frac{k}{|z'|^\alpha}\right)^\eta \int_0^T \int_0^T \frac{\| v(t) \|^p_E}{|t-s|^{1+p(\theta-\eta)}} \, dtds$$

$$+ \left(\frac{k}{|z'|^{\alpha}}\right)^{p} \int_0^T \int_0^T \| v(t)-v(s) \|_E^p \frac{dt\, ds}{|t-s|^{1+\theta p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{k}{|z'|^{\alpha}}\right)^{p} \| v \|^{p}_{W^{\theta,p}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

In forza del Lemma 4.1, abbiamo così

$$\| [P; (Q-z')^{-1}] (P-z'')^{-1} u \|_{W^{\theta,p}} \leq \frac{k}{|\cos\theta''|} \frac{1}{|z''||z'|^{\alpha}} \| u \|_{W^{\theta,p}} .$$

Quindi, assumendo $\varphi(|z'|,|z''|) = 0\,(|z'|^{-\alpha}|z''|^{-1})$, si ottiene il seguente risultato (dovuto a KATO-TANABE attraverso la teoria dei semigruppi analitici)

<u>Teorema 4.2.</u> Sotto le ipotesi (i)- (iv), per ogni $f \in W^{0,p}(0,T;E)$, dove $0<\theta<\min\{\eta, 1/p\}$ e per ogni $\lambda \in ⊄$, il problema (4.1) ha una ed una sola soluzione stretta u, che soddisfa inoltre $u' \in W^{\theta,p}(0,T;E)$.

Applicando il <u>Teorema 3.11</u>, si ha anche

<u>Teorema 4.3.</u> Se E è uno spazio di Hilbert, $p= 2$ e valgono (i)-(iv), allora $\forall f \in L^2(0,T;E)$ e $\forall \lambda \in ⊄$, il problema (4.1) ha una unica soluzione stretta $u \in W_0^{1,2}(0,T;E)$.

5. Un problema di tipo "Two-Point"

Alcuni problemi di controllo ottimo connessi con equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico portano a studiare il seguente problema "two-point" in uno spazio di Hilbert

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \\ u'(t) = -A^*(t)u(t) + C(t)x(t) + g(t), \end{cases} \quad 0 < t < T, \qquad (5.1)$$

$$x(0) = x_0, \; u(T) = u_T .$$

La seconda equazione del sistema definirebbe grosso modo uno stato aggiunto.

L'integrazione, se così vogliamo chiamarla, di (5.1) non è semplice. Il metodo descritto nel libro di LIONS (4), a cui riferiamo per dettagli, riduce (5.1) ad una equazione astratta di tipo Riccati, mediante l'introduzione di un "feedback" : $u = P\,(x)$.

Qui vogliamo riportare alcuni risultati di [3] , in cui un problema del tipo (5.1) viene trattato utilizzando le tecniche operazionali che abbiamo punteggiato nel ϕ 3.

Nel caso di operatori $A(t)$ autoaggiunti, una trattazione è stata data da COOPER [1] (vedi anche TARTAR [5]).

Si potrebbe tentare di approcciare (5.1) definendo

$$P(x,u) = (-x',u'),$$

$$D(P) = W_0^{1,p}(0,T;E) \times W_T^{1,p}(0,T;E),$$

dove $W_T^{1,p}(0,T;E)$ denota lo spazio delle u $W^{1,p}(0,T;E)$ tali che $u(T)=0$. Se poi si pone

$$Q(x,u) = (A(\;)x+B(.)u,\ -A^*(.)\ u+C(.)x),$$

cade però in generale la possibilità di soddisfare H 2 poiché D_P non è stabile per $(Q-\lambda)^{-1}$, supposte oltretutto per Q le condizioni di decrescenza per il suo risolvente.

Vedremo di aggirare dunque l'ostacolo mediante una tecnica di perturbazione e l'uso degli spazi d'interpolazione.

Poniamo:

Definizione 5.1.

Se $\quad P_0 x = -x', \qquad D_{P_0} = W_0^{1,p}(0,T;E),$

$\quad\; P_T u = +u' \qquad D_{P_T} = W_T^{1,p}(0,T;E),$

allora $P(x,u) = (P_0 x, P_T u)$, $D_P = D_{P_0} \times D_{P_T}$.

Se $A_k(t)$, $B_k(t)$ sono operatori lineari in E, E spazio di Banach complesso,

$$D_{Q_k} = \{x \in L^P(0,T;E);\ x(t) \in D_{A_k(t)} \text{ q.d. in } [0,T],$$

$$A_k(.)x(.) \in L^P(0,T;E)\},$$

$$Q_k x = A_k(.)x(.), \quad k = 0,T,$$

$$D_Q = D_{Q_0} \times D_{Q_T}, \quad Q(x,u) = (Q_0 x, Q_T u).$$

Ciò posto, facciamo l'ipotesi H4

Ipotesi H 4. Per $k = 0,T$ e $0<t<T$, $B_k(t) \in L(E)$; inoltre, $t \to B_k(t)$ è limitata nella norma di $L(E)$ e misurabile nella topologia forte di $L(E)$.

La H 4 assicura che $\forall\ u \in L^P(0,T;E)$, $t \to B_k(t)u(t) \in L^P(0,T;E)$ e $\|B_k(t)u(.)\|_{L^P(0,T;E)} \leq C\|u(.)\|_{L^P(0,T;E)}$. Di qui, se $G_k: L^P(0,T;E) \to L^P(0,T;E)$ è dato mediante $(G_k u) = G_k(t)u(t)$ e $G: X = L^P(0,T;E\times E) \to X$ è dato mediante $G(x,u) = (G_0 u, G_T x)$, allora $G_k (k=0,T)$ e G sono operatori limitati.

H 5: $A_k(t)$, $0<t<T$, ha la proprietà $H(\theta_1)$ uniformemente in $t \in [0,T]$, esiste $\theta_1 \in (0,\pi)$ tale che $\Sigma_{\theta_1} \subseteq \bigcap_{0<t<T} \rho(A_k(t))$ e $\lambda\ \forall \in \Sigma_{\theta_1}$, $t \to (A_k(t)-\lambda)^{-1} x$ è assolutamente continua $\forall x \in E$.

Inoltre, $\forall\ \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$, $t \to (A_k(t)-\lambda)^{-1} x$ è assolutamente continua $\forall x \in E$. Inoltre, $\forall \lambda \notin \Sigma_{\theta_1}$ c'è $M_\lambda \subseteq [0,T]$, di misura nulla, tale che $\forall y \in E$, $t \to (A_k(t)-\lambda)^{-1} y$ ha derivata limitata in $[0,T] \setminus M_\lambda$ $(k = 0,T)$. In=

fine, c'è una funzione $C_1: (-\pi+\theta_1, \pi-\theta_1) \to R^+$, tale che $\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$,

$$\left\| \frac{d}{dt} (A_k(t)-\lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_1(\arg \lambda)|\lambda|^{-\xi} \quad (k = 0,T),$$

dove ξ è un elemento di $(0,1]$, ed esiste $\eta \in (0,1]$ tale che $\forall \lambda \in \Sigma_{\theta_1}$ e $\forall t, s \in [0,T]$,

$$\left\| \frac{d}{dt} (A_k(t)-\lambda)^{-1} - \frac{d}{ds} (A_k(s)-\lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq C_1(\arg \lambda)|\lambda|^{-\xi}|t-s|^{\eta}.$$

<u>Ipotesi H 6</u>: $\forall x \in E$, $t \to B_k(t)x$ è assolutamente continua su $[0,T]$ e c'è $M \subseteq [0, T]$, di misura nulla, tale che su $[0,T] \setminus M$, $t \to$ $\to B_k(t)x$ ha derivata limitata $(k = 0,T)$.

Le <u>Ipotesi</u> H 4-6 verranno utilizzate in seguito per poter appli= care i risultati astratti. Il seguente problema verrà, così,affron= tato e risolto.

<u>Definizione 5.2</u>. Diremmo che (x,u) è una soluzione <u>stretta</u> di

$$\begin{aligned} & x'(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t) - \lambda x(t) + f(t), \quad 0<t<T \\ & u'(t) = -A_T(t)u(t) - B_T(t)x(t) + \lambda u(t) + g(t), \qquad (5.2) \\ & x(0) = u(T) = 0, \end{aligned}$$

se $x \in W^{1,p}(0,T;E)$, $u \in W^{1,p}(0,T;E)$, $x(t) \in D_{A_0(t)}$ q.d. su $[0,T]$, $u(t) \in D_{A_T(t)}$ q.d. su $[0,T]$; la funzione $t \to (A_0(t)x(t), A_T(t)u(t))$ appartiene a $X = L^p(0,T; E\times E) \cong L^p(0,T;E) \times L^p(0,T;E)$, e vale (5.2).

E'allora chiaro che (5.2) può essere messo sotto la forma

$$(P + Q + G - \lambda)\ \omega = h \qquad (5.3)$$

dove $\omega = (x,u)$, $h = (-f, g)$.

QUALCHE OSSERVAZIONE DI CARATTERE GENERALE

Lemma 5.3. Se valgono H 1 e H 2 allora

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|S_\lambda\|_{L(D_B(\theta;p))} = 0 \qquad \forall\theta\ (0,1).$$

Ricordo che

$$S_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} (A-z-\lambda)^{-1} (B+z)^{-1} dz,$$

mentre

$$R_\lambda = -(2\pi i)^{-1} \int_{\gamma_\lambda} [B;\ (A-z-\lambda)^{-1}] (B+z)^{-1}\, dz.$$

Qui A, B sono quelli del ϕ 3. Per noi, B=P, A = Q nella (5.3.). Ora, è ben nota ([2]) che $\lim_{\lambda\to\infty} \|S_\lambda\|_{L(X)} = \lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda\|_{L(X)} = 0$

Poiché $G \notin L(X)$ c'è $\lambda_0>0$ tale che $\forall\lambda>\lambda_0$

$$\|R_\lambda\|_{L(X)} < 1,\ \|S_\lambda\|_{L(X)}\ \|(1+R_\lambda)^{-1}\|_{L(X)}\ \|G\|_{L(X)} < 1.$$

Così $\forall\lambda>\lambda_0$ esiste in L(X)

$$T_\lambda = (1+S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}\ G)^{-1} S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1} =$$

$$= S_\lambda(1+R_\lambda)^{-1}(1+GS_\lambda\ (1+R_\lambda)^{-1})^{-1}$$

Si può allora provare che se $D_B(= D_P)$ è denso in X e $\lambda>\lambda_0$, allora $\forall h \notin X$, $T_\lambda h$ è l'unica soluzione FORTE (nel senso di DA PRATO-GRISVARD) di (5.3); cioè esiste una successione h_n X, $h_n \to h$ in X tale che (5.3) ha una unica soluzione stretta ω_n, dove h_n sostituisca h, e $\omega_n \to \omega$ in X.

Noi però vogliamo soluzioni strette. A tal fine, dobbiamo assumere

<u>Ipotesi H 7</u>: $G|_{D_B(\theta;p)} \quad L\ (D_B(\theta;p)),\ R_\lambda|_{D_B(\theta;p)} \in$

$L(D_B(\theta;p))$ e $\lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda\|_{L(D_B(\theta;p))} = 0,\ 0<\theta<1$.

Si può allora vedere

<u>Teorema 5.4</u>. Valgano $H(\theta_R)$, $H(\theta_Q)$, $H(Q,P;\phi)$ e H 7. Allora $\forall\ \lambda>\lambda_\theta$ e $\forall h \in D_B(\theta;p)$ T_λ h è l'unica soluzione stretta di (5.3). Inoltre, $QT_\lambda h$, $PT_\lambda h$ $D_P(\theta;p)$.

L'<u>ipotesi</u> H 7 sarà senz'altro soddisfatta se G muta con continuità D_B in sé e R_λ muta D_B in sé con $\|R_\lambda\|_{L(D_B)} \leq$ cost. Ciò segue per interpolazione (Teorema 1.4) e perché sappiamo che

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|R_\lambda\|_{L(X)} = 0$$

<u>SUGLI SPAZI DI INTERPOLAZIONE</u>

Avendo definito $D_P = D_{P_0} \times D_{P_T}$, abbiamo subito che

$$D_P(\theta;p) = D_{P_0}(\theta;p) \times D_{P_T}(\theta;p).$$

Ma se $0<\theta<1/p$, allora $D_{P_0}(\theta,p) = W^{\theta,p}(0,T;E)$.

Posto $(\phi u)(t) = u(T-t)$, è chiaro che ϕ definisce un isomorfismo isometrico di $L^p(0,T;E)$ su se stesso tale che $\Phi(D_{P_0}) = D_{P_T}$. Per interpolazione, $\phi(D_{P_0}(\theta;p)) = D_{P_T}(\theta;p)$ e così per $0<\theta<1/p$, possiamo identificare $D_{P_0}(\theta;p)$ con $D_{P_T}(\theta;p)$.

Nel caso di E spazio di Hilbert, poiché $P_T = P_0^*$, $P_0 = P_T^*$,

risulta facilmente $D_{p^*}(\theta;2) = D_p(\theta;2)$, $0<\theta<1/2$.

Soluzione di (5.2)

L'ipotesi H 6 implica il

Lemma 5.5. Se H 6 è soddisfatta, allora $\forall\, \theta \in (0,1/p)$, risulta $G_{|D_p(\theta;p)} \in L\,(D_p(\theta;p))$.

Infatti, la H 6 assicura, in forza del Teorema di Banach-Stein= haus, che $G_{0|D_{P_0}(\theta;p)} \in L\,(D_{P_0}(\theta;p))$ e analogamente per G_T. Così

$$G_{|D_p(\theta;P)} \in L\,(D_{P_0}(\theta;p) \times D_{P_T}(\theta;p)\,;\, D_{P_T}(\theta;p) \times D_{P_0}(\theta;\, p)).$$

Ma in virtù della precedente osservazione, $G_{|D_p(\theta;p)}$ $L(D_p(\theta;p))$

Il risultato principale segue dal Lemma 4.1 e dal Teorema 4.2 .

Teorema 5.6. Se valgono H.4-6, $\theta \in (0,1/p)$, allora per ogni $f \in W^{\theta;p}(0,T;E)$, $g \in W^{\theta;p}(0,T;E)$, il problema (5.2) ha una unica soluzione stretta (x,u), tale che $x', u', A_0(.)x(.), A_T(.)u(.) \in$ $\in W^{\theta,p}(0,T;E)$, purché λ sia abbastanza grande.

Il Teorema 4.3. implica a una volta il seguente

Teorema 5.7. Se valgono H. 4-6, $D_{A_k(t)}$ è denso nello spazio di Hilbert E $\forall\, t \in [0,T]$, $k = 0,T$, allora per ogni λ sufficientemente grande e per ogni $f,g \in L^2(0,T;E)$ il problema (5.2) ha una ed una sola soluzione stretta.

Osservazione. Avrei potuto esporre risultati per il problema non omo= geneo (5.2) con condizioni iniziali o finali non nulle. Si sareb=

bero dovuti usare allora certi risultati di tracce (in 0, 0 in T) dovuti principalmente a GRISVARD.

vedi [2], p. 336 e sgg. .

[1] J.M.COOPER: Two-Point Problems for abstract evolution equa= tions, J.Diff. Eqs. 9 (1971), 453-495.

[2] G.DA PRATO & P.GRISVARD: Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J.Math. Pures Appl. 54 (1975), 305-387.

[3] A.FAVINI & A.VENNI: On a two-point problem for a system of abstract differential equations, Numer, Funct. An & Optim. 2(4) (1980), 301-322.

[4] J.L.LIONS Contrôle optimal de système gouvernés par des équations aux dérivées partielles, (DUNOD),1968.

[5] L.TARTAR: Sur l'etude directe d'equations non linéaires intervenont en théorie du Contrôle optimal, J. Funct. Anal, 17 (1974), 1-47.

[6] H.TRIEBEL: Interpolation theory, Function spaces, Differential operators, (NORTH HOLLAND), 1978.